УСТОЙЧИВОСТ НА ЗАТВОРЕНИ ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ С ИНТЕРВАЛНИ ДАННИ

Любомир Колев, Симона Петракиева

Резюме: *В настоящата статия се третира проблемът, свързан с анализ на устойчивост на линейни непрекъснати затворени системи за управление при интервално описание на неопределеността в тях. Задачата се свежда до задача за изчисляване на външни оценки на диапазоните на изменение на собствените числа на матрици с елементи, които са зависими интервали посредством елементите на всички участващи матрици* $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{K}$, *които от своя страна са независими помежду си интервали. Разгледан е случая на реални собствени числа с цел опростяване на представянето. Използваният метод е предложен за първи път за анализ на устойчивост на линейни непрекъснати отворени системи за управление с интервални данни. Той се състои в решаване на слабо нелинейна система, която се състои от n уравнения с n неизвестни и е с точкови коефициенти.*

Практическото приложение на метода е илюстрирано върху числен пример.

STABILITY ANALYSIS OF CLOSED-LOOP LINEAR SYSTEMS UNDER INTERVAL DATA

Lubomir Kolev, Simona Petrakieva

Abstract: *In this paper the problem of stability analysis of linear closed-looped systems under interval uncertainties is considered. The problem is reduced to the problem of determining outer bounds on the ranges of the eigenvalues of interval matrices with dependent coefficients with respect to the independent elements of all other interval matrices* $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{K}$. *The case of real eigenvalues is discuss for simplify the presentation. The method is suggested first for stability analysis of open linear systems under interval data. It consist of setting up and solving a system of n nonlinear equations with n unknowns with real coefficients. The latter system is only mildly nonlinear and its solution presents no numerical difficulties.*

An example illustrating the applicability of the method presented is provided

1. Въведение

В серия от публикации на авторите до момента бе дискутиран проблемът за анализ на устойчивост на линейни непрекъснати отворени системи за управление (СУ) при интервално описание на неопределеността в тях ([1]-[4]). Математическият модел на тези системи в пространство на състоянията има вида:

$$\dot{x} = Ax\,. \qquad (1)$$

Тогава задачата за анализ на устойчивост се свежда до изчисляване на диапазоните на изменение на собствените числа на матрицата A при интервално изменение на нейните елементи, т.е. $A \in \boldsymbol{A}$. Последните могат да бъдат както независими, така и зависими помежду си интервали посредством системните параметри.

Годишник на ТУ – София, т. 54, кн. 1 / 2004 г.
Proceedings of the TU of Sofia, vol. 54, № 1 / 2004

Забележка: В изложението по-нататък всички точкови величини ще бъдат записвани с нормален шрифт, а всички интервали – с удебелен.

При интервално описание на неопределеността и при независими елементи на матрицата A могат да се търсят диапазоните на изменение на собствените числа на интервалната матрица $\mathbf{A}$ [1] , както и техни външни оценки ([2] – при реални собствени числа и [3] – в комплексния случай). Предложени са методи за изчисляване и на вътрешни оценки на техните граници [1]. Случая на зависими интервални елементи на матрицата A е дискутиран в [4].

Базирайки се на този подход в настоящата статия се анализира устойчивостта на линейни непрекъснати затворени СУ със следното описание в пространството на състоянията:

$$\dot{x} = A'x + Bu . \tag{2}$$

Ако в обратната връзка на системата е включен компенсатор с предавателна функция K, то управлението u се представя като:

$$u = Kx . \tag{3}$$

Замества се (3) в (2) и се получава:

$$\dot{x} = (A' + BK)x . \tag{4}$$

Откъдето следва, че описанието (4) на затворената линейна непрекъсната СУ е аналогично по структура със съответното на отворената СУ (1)

$$\dot{x} = Ax , \tag{5}$$

където

$$A = A' + BK . \tag{5a}$$

В настоящата статия е анализирана устойчивостта на затворена линейна непрекъсната СУ (5) с интервална матрица A' за следните случаи:

1) Матриците B и K са съставени от точкови елементи.
2) Елементите на матрицата B са точкови, а на матрицата K – интервални.
3) Елементите на матрицата B са интервални, а на матрицата K – точкови.
4) Матриците B и K са съставени от интервални елементи.

Статията е организирана по следния начин. В следващия раздел е дефинирана задачата за изчисляване на външни оценки на границите на диапазоните на изменение на собствените числа на матрицата $\mathbf{A}$ при интервално изменение на елементите и. Същността на метода за определяне на външни оценки е описана в Раздел 3, а практическото му приложение е илюстрирано с числен пример в Раздел 4. Изводи относно особеностите на използвания метод са направени в Раздел 5.

Забележки: 1. Разгледан е случая на елементи на матрицата $\mathbf{A}$, които са независими интервали с цел опростяване на изложението и улеснение на възприятието.

2. Описан е само метод за изчисляване на външни оценки на търсените диапазони, тъй като те осигуряват достатъчни условия за устойчивост на анализираната линейна непрекъсната затворена СУ.

2. Дефиниране на задачата за устойчивост

Задачата за оценяване на собствените числа на матрици с независими интервални коефициенти е дефинирана в [1]. Но за прегледност на изложението

ще бъде наблегнато върху някои основни моменти в нейната формулировка. Нека A (вж. ф-ла (5)) е матрица с реални елементи с размерност (n x n), $\mathbf{A}$ – интервална матрица, съдържаща матриците A^-, A^+, A^0 и $R(A)$, които са съответно матрици, съставени от левите и десните граници, центровете и радиусите на интервалните елементи на матрицата $\mathbf{A}$. Тогава е необходимо да се реши следната задача:

$$Ax = \lambda x,\ A \in \mathbf{A} = [\,A^-, A^+] = A^0 + [\,-R_A, R_A], \tag{6}$$

където всяка матрица $A \in \mathbf{A}$, е неособена.

Забележка: За простота на изложението ще се приеме, чее собствените числа, дефинирани посредством (6), са само реални. Ще се изчисляват външните оценки на диапазона на изменение само на най-близкото до имагинерната ос собствено число, тъй като то е доминиращо при анализа на устойчивостта на изследваната СУ и индексът max ще се пропуска. Методът е приложим за всяко собствени число на матрицата $\mathbf{A}$.

За целта, първо се определя максималното собствено число на матрицата A^0 и се потвърждават Допускания 1 и 2 от [2, 3].

Допускане 1: За всяко $k \in K = 1, \ldots , n'$, всички $\lambda^{(k)}(A)$ и $x^{(k)}(A)$, съответстващи на $A \in \mathbf{A}$, остават реални.

Забележка: За простота в разглежданията си по-нататък ще се пропуска индекса k.

Отчитайки Допускане 1, следва че точният диапазон на изменение на максималното собствено число на матрицата A

$$\boldsymbol{\lambda}^*_{max} = \boldsymbol{\lambda}^* = \{\ \lambda(A) \colon A \in \mathbf{A}\} \tag{7}$$

е реален интервал.

В изложението по-нататък всеки интервал $\boldsymbol{\lambda}'$, за който е изпълнено $\boldsymbol{\lambda}' \supseteq \boldsymbol{\lambda}^*$ ще се нарича външна оценка на диапазона на изменение на съответното максимално собствено число λ_{max}.

За простота на изложението и без загуба на всеобщността на разглежданията е необходимо да се направи още едно допускане. Нека двойката (x^0, λ^0) е решение на системата, с коефициенти центровете на елементите на интервалната матрица $\mathbf{A}$:

$$A^0x^0 = \lambda^0x^0 \tag{8}$$

Допускане 2: Приема се, че абсолютната стойност на n-тата компонента $|x_n^0|$ на вектора x^0 е максимална, т.е.

$$|x_n^0| \ge |x_i^0|,\ i \ne n \tag{9}$$

Забележка: Ако s-тата компонента е максимална, е необходимо да се разменят местата съответно на s-тия и n-тия ред в матрицата A, както и позициите на компонентите x_s и x_n.

Нормира се собственият вектор x^0, съответстващ на λ^0_{max}, по отношение на n-тата си компонента

$$|x_n^0| = 1 . \tag{10}$$

Необходимо е обобщение на (10) във вида:

$$|x_n(A)| = 1,\ \forall A \in \mathbf{A} . \tag{10a}$$

Въвежда се n-мерен реален вектор

$$y = [y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_n]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

с компоненти

$$y_i = x_i(A),\ i = 1, \dots, n\text{-}1$$

$$y_n = \lambda(A) \tag{12}$$

Използвайки (11) и (12), система (6) може да се запише във вида:

$$\left|\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j + a_{in} - y_n y_i = 0,\ i = 1, \dots, n-1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj} y_j + a_{nn} - y_n = 0 \end{array}\right. , \tag{13}$$

където $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} = [a_{ij}^-, \quad a_{ij}^+]$. (14)

Система (13) е слабо нелинейна (в частност квадратична) система с интервални коефициенти поради наличието на членове $y_n y_i$ в първите си n-1 уравнения. Ако с y_i^* е означен диапазона на изменение на i-тата компонента $y_i(A)$, $A \in \boldsymbol{A}$, на решението на система (13), а $\boldsymbol{y}^*$ - съответстващия му интервален вектор, задачата, която си поставяме е следната:

Задача 1: Да се намерят външни оценки $\boldsymbol{y}$ на диапазоните на изменение на решението на (13) $\boldsymbol{y}^*$ за $\forall a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, които външни оценки са по-широки от $\boldsymbol{y}^*$, т.е.

$$\boldsymbol{y} \supseteq \boldsymbol{y}^* . \tag{15}$$

Забележка: В частност при решаване на задачата за анализ на устойчивост на линейната непрекъсната затворена СУ (5) се интересуваме единствено от n-тата компонента на това решение.

3. Външни оценки

Отчитайки формула (5а), следва че

$$A = A' + BK . \tag{16}$$

В общ случай всяка от матриците в израз (16) се състои от независими помежду си интервали. Следователно всяка от тях може да се запише като:

$$\boldsymbol{A}' = A_0' + \left[-R(\boldsymbol{A}'), \quad R(\boldsymbol{A}')\right], \boldsymbol{B} = B^0 + [-R(\boldsymbol{B}), \quad R(\boldsymbol{B})], \ \boldsymbol{K} = K^0 + [-R(\boldsymbol{K}), \quad R(\boldsymbol{K})]. \tag{17}$$

Забележка: Индексът 0 на матрицата A_0', съставена от стойностите на елементите на интервалната матрица $\boldsymbol{A}'$ в съответните им центрове, е избран за долен индекс, за да не възникне объркване с горния индекс $'$.

Записва се (16) за всеки от елементите на матрицата A

$$a_{ij} = a_{ij}' + \sum_{l=1}^{n} b_{il} k_{lj} \tag{18}$$

и се замества в (13)

$$\left|\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(a_{ij}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{il} k_{lj} \right) y_j + \left(a_{in}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{il} k_{ln} \right) - y_n y_i = 0,\ i = 1, \dots, n-1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(a_{nj}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{nl} k_{lj} \right) y_j + \left(a_{nn}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{nl} k_{n} \right) - y_n = 0 \end{array}\right. . \tag{19}$$

Решението на система (19) се основава на предложената в [2] идея, която тук ще бъде припомнена накратко. Нека $z = z_0 + u \in \boldsymbol{z}$, $t = t_0 + v \in \boldsymbol{t}$, където $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{t}$ са интервални съответно с центрове z_0, t_0 и радиуси r_z, r_t. Тогава

$$zt \in -z_0 t_0 + t_0 z + z_0 t + [-r_z r_t, \ r_z r_t]. \tag{20}$$

Прилага (20) към нелинейните членове от система (19), отчитайки връзките $a_{ij}' = a_{0ij}' + q_{ij}$, $b_{ij} = b_{ij}^0 + z_{ij}$, $k_{ij} = k_{ij}^0 + t_{ij}$, $y_i = y_i^0 + v_i$, $i, j = 1, \dots, n$, (21)

където a_{ij}^0, b_{ij}^0 и k_{ij}^0 са съответно центровете на интервалите на елементите на матриците $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$, а y_i^0 е решението на система (19) при стойности на коефициентите a_{ij}, b_{ij} и k_{ij} в центровете на съответстващите им интервали. Резултантната линейна система по отношение на нарастъците на всяка от интервалните величини q_{ij}, z_{ij}, t_{ij}, v_i, получена от система (19) и връзките (21), ще има вида:

$$\left|\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(a_{0ij}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{il}^0 k_{lj}^0 \right) v_j - y_n^0 v_i - y_i^0 v_n = \boldsymbol{b}_i,\ i = 1, \dots, n-1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(a_{0nj}' + \sum\limits_{l=1}^{n} b_{nl}^0 k_{lj}^0 \right) v_j - v_n' = \boldsymbol{b}_n \end{array}\right. , \tag{22}$$

където

$$\boldsymbol{b}_i = -\left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{ij}^0 + \sum_{l=1}^{n} b_{il}^0 k_{lj}^0 \right) y_j^0 + \left(a_{in}^0 + \sum_{l=1}^{n} b_{il}^0 k_{ln}^0 \right) + y_n^0 y_i^0 \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(q_{ij} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{il}^0 t_{lj} + \sum_{l=1}^{n} z_{il} k_{lj}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{il} t_{lj} \right) y_j^0 -$$
$$- \left(q_{in} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{il}^0 t_{ln} + \sum_{l=1}^{n} z_{il} k_{ln}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{il} t_{ln} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(q_{ij} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{il}^0 t_{lj} + \sum_{l=1}^{n} z_{il} k_{lj}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{il} t_{lj} \right) v_j + v_i v_n,\ i = 1, \dots, n-1 ,$$

$$\boldsymbol{b}_n = -\left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{nj}^0 + \sum_{l=1}^{n} b_{nl}^0 k_{lj}^0 \right) y_j^0 + \left(a_{nn}^0 + \sum_{l=1}^{n} b_{nl}^0 k_{ln}^0 \right) + y_n^0 \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(q_{nj} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{nl}^0 t_{lj} + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} k_{lj}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} t_{lj} \right) y_j^0 -$$
$$- \left(q_{nn} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{nl}^0 t_{ln} + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} k_{ln}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} t_{ln} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(q_{nj} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{nl}^0 t_{lj} + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} k_{lj}^0 + \sum_{l=1}^{n} z_{nl} t_{lj} \right) v_j .$$

Система (22) може да бъде записана в матрична форма:

$$\widetilde{A}^0 v = \boldsymbol{b} , \tag{22а}$$

където $\widetilde{A}^0$ е описаната чрез система (22) матрица от реални коефициенти пред неизвестните v. Нека матрицата $C = \left| (\widetilde{A}^0)^{-1} \right|$, а $r = [r_i]^{\mathrm{T}}, i = 1, \dots, n$ е вектора от съответните радиуси на интервалните променливи v_i, $i = 1, \dots, n$. Тогава система (22а) може да се запише по отношение на радиусите

$$r = Cr(\boldsymbol{b}) , \tag{23}$$

където: $r(\boldsymbol{b}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left| y_j^0 \right| R_{ij} + R_{in} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} R_{ij} r_j + r_i r_n, \ i = 1, \dots, n-1 ,$ (23а)

$$r(\boldsymbol{b}_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \left| y_j^0 \right| R_{nj} + R_{nn} + \sum_{j=1}^{n-1} R_{nj} r_j . \tag{23б}$$

Разширеният матричен запис на (23) е

$$r = CR\left| \breve{y}^0 \right| + C\breve{R} r + C r_s \breve{r} + R_s , \tag{24}$$

където: R - матрица с елементи, определени съгласно равенството

$$R = R(\boldsymbol{A}) + B^0 R(\boldsymbol{K}) + K^0 R(\boldsymbol{B}) + R(\boldsymbol{B}) R(\boldsymbol{K}) ;$$

$\breve{R}$ - съвпада с матрицата R с изключение на n-тия ред от елементи, които са 0;

R_n – вектор-стълб, формиран от елементите в n-тата колона на матрицата R;

$\breve{r}$ - диагонална матрица с размерност $(n \times n)$ с елементи по главния диагонал;

$\breve{r}(j,j) = r(j),\ j = 1,\dots,n-1$ и $\breve{r}(n,n) = 1$;

$\breve{y}^0$ - вектор-стълб, чиито компоненти са равни на съответните им от вектора y^0 с изключение на $\breve{y}(n) = 1$.

Или записано в компактна форма

$$r = d + Dr + Cr_n\breve{r}\ , \tag{25}$$

където $d = CR\left|\breve{y}^0\right| + R_n;\ D = C\breve{R}$.

Матричното уравнение (25) е нелинейна система с реални коефициенти.

За $\forall r_i \geq 0,\ i = 1,\dots,n$ нейното решение е решение на дефинираната в предходния параграф Задача 1. Неговата n-та компонента определя външните оценки на границите на диапазона на изменение на максималното собствено число $\lambda_{\max}(A)$ при $A \in \boldsymbol{A}$

$$y_n^{'} = y_n^0 + [-r_n,\ r_n], \tag{26}$$

задоволяващо условието за включване (15) - $y^* \subseteq y^{'}$. Следователно е решение на Задача 1.

Теорема 1: [2] Ако нелинейната система (25) има положително решение $r = [r_i]^{\mathrm{T}},\ i = 1,\dots,n$, тогава интервалът (26) е външна оценка $\lambda^{'}$ на диапазона на изменение λ^* на максималното собствено число $\lambda(A)$ на матрицата A при $A \in \boldsymbol{A}$.

В практиката обикновено радиусите $R(\boldsymbol{a}_{ij})$ на компонентите на матрицата $\boldsymbol{A}$ са само малки проценти от съответните елементи на матрицата A^0, което гарантира сходимост на метода на простата итерация.

В разгледания метод за определяне на външните оценки $\lambda^{'}$ на диапазона на изменение на λ^* на реалните собствени числа на матрицата A, $A \in \boldsymbol{A}$ първо се решава номиналната задача за определяне на реалните собствени числа на матрицата A^0. След това за $\forall k \in K$ с метода на простата итерация се решава система (25) и се намира нейното решение $r_i,\ i = 1,\dots,n$. Ако всички r_i са положителни, външните оценки на диапазоните на изменение на съответните собствени числа на $\lambda_k(A)$, $A \in \boldsymbol{A}$ са определени чрез интервала (26).

Забележки: 1. Дотук бе разгледан общия случай, когато елементите на всяка от матриците $\boldsymbol{A}^{'}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$ са интервални. В частност ако някоя от тези матрици е с точкови елементи получените крайни резултати и изводи са в сила с единствената разлика, че окончателната нелинейна система (25) е с по-прости за изчисляване точкови коефициенти, но тя винаги запазва структурата си.

2. Ако матрицата A има и комплексни собствени числа, то същността на метода за изчисляване на външни оценки на диапазоните на изменение на техните реални части се запазва с единствената разлика, че получената нелинейна система с реални коефициенти (25) вече е $2n$-мерна и в нея участват като неизвестни и реалните и имагинерните части на елементите на съответните собствени вектори на матрицата A.

4. Числен пример

Приложимостта на описания в предишния параграф метод за изчисляване на външни оценки на диапазоните на изменение на собствените числа на матрици, чиито елементи са независими помежду си интервали, ще бъде илюстрирана върху следния пример [5].

$$A_0^{'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},\ R(\boldsymbol{A}^{'}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ R(\boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$K^0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ R(\boldsymbol{K}) = \begin{bmatrix} 0.37 & 0 & 0.37 \\ 0 & 0.37 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

От (27) се вижда, $n = 3$ и замествайки (27) в (5а) се получава

$$A^0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix},\ R(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0.37 & 0 & 0.37 \\ 0 & 0.37 & 0 \\ 0.37 & 0.37 & 0.37 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Определя се вектора от собствени числа на централната матрица A^0

$$\Lambda^0 = [-1.5858 \quad -4.4142 \quad -3.0000]^{\mathrm{T}} \tag{29а}$$

и се намира максималната му компонента

$$\lambda_{\max} = \max_i\{\lambda_i(A^0)\} = -1.5858. \tag{29б}$$

Тогава индексът k, съответстващ на $\lambda_{\max} = -1.5858$, е $k = 1$. А индексът на максималната компонента на съответния собствен вектор x^0 е $s = 1$. Тогава съответният нормиран вектор x^0, съответстващ на $\lambda_{\max}$ има вида:

$$x^0 = (1 \quad 0 \quad -0.4142)^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

Въвежда се нов вектор на променливите

$$y = (y_1,\quad y_2,\quad y_3)^{\mathrm{T}}, \tag{31}$$

така, че $y^0 = (-1.5858 \quad 0 \quad -0.4142)^{\mathrm{T}}$. (31а)

Тогава система (13) добива вида:

$$\left|\begin{array}{l} \sum\limits_{j=2}^{3} a_{1j}y_j + a_{11} - y_1 = 0 \\ \sum\limits_{j=2}^{3} a_{ij}y_j + a_{i1} - y_1y_i = 0,\ i = 2,3 \end{array}\right. . \tag{32}$$

В нея се заместват връзките (21) и резултантната система се записва по отношение на радиусите на участващите в нея интервални величини

$$\left|\begin{array}{l} r_1 = 0.6316 + 0.8536r_1 + 0.1691r_2 + 0.1850r_3 + 0.1036r_1r_2 + 0.3536r_1r_3 \\ r_2 = \qquad\qquad 0.2616r_2 + \qquad\qquad 0.7071r_1r_2 \\ r_3 = 0.2616 + 0.1464r_1 + 0.0925r_2 + 0.1850r_3 + 0.6036r_1r_2 + 0.3536r_1r_3 \end{array}\right. . \tag{33}$$

Решението на (33) е:

$$r = (1.2865 \quad 0 \quad 0.7264)^{\mathrm{T}}, \tag{34}$$

откъдето се вижда, че $r_1 = 1.2865$. (34а)

Замествайки (29б) и (34а) в (26), външните оценки на търсения диапазон са: $\lambda_{\max}^{'} = \lambda^{'} = [-2.8723 \quad -0.2993]^{\mathrm{T}}$, (35) откъдето се вижда, че изследваната линейна непрекъсната затворена СУ (4) при стойности на параметрите на модела (27) е устойчива със запас на устойчивост $M = 0.2993$.

5. Заключение

В настоящата статия е разгледан проблемът за анализ на устойчивост на линейни непрекъснати затворени СУ с интервално описание на неопределеността. Задачата се свежда до задача за изчисляване на външни оценки на диапазоните на изменение на собствените числа на матрици с елементи, които са зависими интервали посредством елементите на всички участващи матрици A', $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{K}$, които от своя страна са независими помежду си интервали. Получените външни оценки са достатъчни условия за устойчивост на изследваните СУ. Тези външни оценки могат да бъдат получени както за реални, така и за комплексни собствени числа на матрицата A, но в статията е изложен само реалният случай с цел опростяване на представянето.

Предложеният в [2] за случая на линейни отворени СУ метод за изчисляване на външни оценки изисква първо да се определят собствените числа на матрицата A^0 и съответните им собствени вектори за централната (номиналната) задача (8). Методът се състои в решаване на система от n слабо нелинейни (квадратични) уравнения (25) с реални коефициенти по отношение на радиусите r_i, $i = 1, \ldots, n$. Решението на оригиналната Задача 1 се намира като n-тата компонента r_n във вектора на радиусите r. Тя се изчислява съгласно формула (26).

В случай на комплексни собствени числа на матрицата A така описания метод за изчисляване на външни оценки на търсените диапазони е аналогичен по структура на реалния случай с единствената разлика, че окончателната нелинейна система (25) е $2n$-мерна. Друга възможна детайлизация на метода, при която получените външни оценки са по-тесни, е чрез отчитане на взаимната корелация между елементите на матрицата A посредством независимите параметри в СУ, които приемат фиксирани предварително неизвестни стойности в предварително определени независими помежду си интервали.

Литература

1. Kolev, L. V., S. K. Filipova-Petrakieva, Inner bounds and exact solution for the range of the eigenvalues of interval matrices, Technical ideas, BAS, vol. 39, N 1-2, 2002, pp. 44-52.
2. Kolev, L. V., S. K. Filipova-Petrakieva, N. Vrabchev, Outer bounds on the real eigenvalues of interval matrices, Proceedings of XI International Symposium on Theoretical electrical engineering ISTET'01, Linz, Austria, 19-22 August 2001, pp. 383-386.
3. Kolev, L. V., S. K. Filipova-Petrakieva, Outer bounds on the eigenvalues of interval matrices - the complex eigenvalues case, Proceedings of the TU-Sofia, vol.51, 2000-2001, pp.139-147.
4. Kolev, L. V., S. K. Filipova-Petrakieva, Stability analysis of linear interval parametric systems via assessing the eigenvalue range, Proceedings of XII International Symposium on Theoretical electrical engineering ISTET'03, July 6-9, 2003, Warsaw, Poland, pp. 211-215.
5. Keel, L., S. Bhattacharyya, Robust stability of interval matrices: a computational approach, International Journal of Control, vol. 62, N 6, 1995, pp. 1491-1506.

Любомир Колев (проф. д.т.н.), Симона Петракиева (инж. ст. ас.)
Факултет “Автоматика”, Катедра “Теоретична електротехника”, Технически Университет – София, 1756, София, България
Lubomir Kolev (Professor, D. Sc.), Simona Perakieva (eng. Assistant)
Faculty of Automatica, Technical University of Sofia, 1756 Sofia, Bulgaria
e-mails: lkolev@tu-sofia.bg, petrakievas-te@tu-sofia.bg