СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Татяна Любенова Тодорова

Три задачи от Аналитичната теория на числата

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация

За присъждане на образователната и научна степен

"ДОКТОР"

по научната специалност

01.01.02 Алгебра и Теория на числата

научен ръководител: проф. Керопе Чакърян
научен консултант: проф. дмн Дойчин Толев

София, 2015 г.

Дисертацията съдържа 173 страници и се състои от Увод, 5 глави и Литература, която включва 86 заглавия.

Дисертантът работи като асистент към катедра "Алгебра"на Факултета по Математика и Информатика при СУ "Св. Кл. Охридски".

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... часа в аудитория .... на Факултета по Математика и Информатика на СУ "Св. Кл. Охридски бул. "Дж. Баучер"5, 1164 София.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Факултета по Математика и Информатика на СУ "Св. Кл. Охридски бул. "Дж. Баучер"5, 1164 София.

Една от най-известните хипотези в теорията на числата гласи, че съществуват безбройно много прости числа близнаци, т.е. прости числа p такива че $p+2$ също е просто. Това е един от най-старите нерешени проблеми в математиката.

Един от методите, използвани за неговото решаване е методът на решетото, Той води началото си от решетото на Ератостен, което представлява ефективен начин за намиране на всички прости числа по-малки или равни на някое положително число x.

Първото нетривиално приближение към хипотезата за простите числа близнаци е намерено от Брун [7] през 1919 година. Той прави първата съществена модификация на метода на решетото на Ератостен и доказва, че съществуват безбройно много естествени числа n, такива че $n = P_9$ и $n+2 = P_9'$ (както обикновено с P_r сме означили естествено число, което има най-много r прости делителя, броени с техните кратности). Неговата работа е станала предпоставка за огромен напредък в развитието на метода на решетото. Впоследствие резултата на Брун е многократно подобряван. Най-добрата известна оценка принадлежи на Chen [14] (1966 г.), който използвайки решето с тегла доказва, че съществуват безбройно много прости числа p, за които $p+2 = P_2$.

Използвайки методите на решетото в комбинация с оценки на някои експоненциални суми през 2013 година е направен огромен пробив към решаването на хипотезата за простите числа близнаци. Нека p_n означава n-тото просто число. Итанг Джанг [71] доказва, че съществуват безбройно много двойки последователни прости числа, такива че $p_{n+1} - p_n < 7.10^7$. По-късно, същата година, този резултат е подобрен до $p_{n+1} - p_n < 600$, а доказателството е значително опростено от двама математици - Мейнард и Тао [52]. Най-добрият публикуван резултат $p_{n+1} - p_n < 246$ [56] (2014 г.) принадлежи на група математици, които пишат под името Полимат.

Нека имаме някаква задача (неравенство, уравнение и др.), включваща прости числа. Тогава можем да разгледаме същата задача за прости числа p, за които $p+2 = P_r$, където r е фиксирано естествено число.

Ще разгледаме няколко подобни проблема.

Разпределение на числата αp по модул 1.

Нека α е ирационално. През 1947 Виноградов [76] доказва, че ако $0 < \theta < 1/5$ то съществуват безброй много прости числа p, такива че

$$||\alpha p|| < p^{-\theta}\,. \tag{1}$$

След Виноградов, Вон [69] разглежда горното неравенство. Той опростява доказателството на Виноградов и подобрява експонентата в (1) до $\theta < \dfrac{1}{4}$. И в двете работи е получена асимптотична формула за броя на простите числа, удовлетворяващи (1). По-късно Харман [28] въвежда метода на решетото при решаването на този проблем и успява да подобри θ до $\theta < \dfrac{3}{10}$, като след това в [29] подобрява оценката до $\theta < \dfrac{7}{22}$. За своите резултати Харман използва същите аритметични свойства като в работата на Вон. Подобрението се получава от прилагането на метода на решетото. Следващото подобрение за θ принадлежи на Хийт-Браун и Джиа [37]. Използвайки оценки на суми на Клостерман, те намират оценката $\theta < \frac{16}{49}$. От друга страна като следствие от Обобщената хипотеза на Риман се получава факта, че съществуват безбройно много прости числа p, такива че за всяко $\theta < \frac{1}{3}$ е изпълнено неравенството (1). В [51] Каиса Матомаки подобрява резултата на Хийт-Браун и Джиа като доказва неравенството (1) с $\theta < \frac{1}{3}$ без да ползва Обобщената хипотеза на Риман. Понастоящем това е и най-силният известен резултат по тази задача.

Нашият пръв резултат е хибрид между проблема на Виноградов и хипотезата за простите числа-близнаци. По-точно в сила е следната

Теорема: *Нека* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \theta \leq 1/100$. *Тогава съществуват безбройно много прости числа* p, *такива че* $p + 2 = \mathrm{P}_4$ *и*

$$||\alpha p + \beta|| < p^{-\theta}.$$

Горното твърдение е доказано в глава 3 на дисертацията.

При доказателството сме използвали решето с тегла.

Най-общо идеята на метода на решетото е следната: за всяко крайно множество A, множество $\mathcal{P}$ от прости числа и число $z \geq 2$, от множеството A да се отстранят всички елементи, които се делят на простите числа $p \in \mathcal{P}$, по-малки от z. Така останалите след тази процедура членове на A ще имат прости делители, по-големи от z и следователно ще имат малък брой прости делители, принадлежащи на множеството $\mathcal{P}$.

Понякога, за получаване на по-добри резултати, се прилага решето с тегла. Идеята на решетото с тегла принадлежи на Кун, който предлага на всеки елемент a от множеството A присвоим тегло от вида

$$1 - \sum_{p|\,a} w_p\,,$$

където w_p е положителна функция на p. Това дава възможност да се усили резултата от прилагането на метода на решетото.

След Кун много математици прилагат своите идеи за тегла. Ние използваме теглото, предложено от Рихерт и Халберстам (виж гл. 9, [26]).

Ключов момент за получаване на по-добър резултат за броя на простите делители на числата $p+2$, се оказва оценката на една експоненциална сума. За нейното доказателство сме използвали тъждеството на Хийт-Браун. По-късно Матомаки [49] получава резултат от типа на Бомбиери-Виноградов за линейните експоненциални суми, в които участват добре разпределени функции и използвайки линейното решето на Иваниец с малко по-сложно тегло, подобрява нашето твърдение до $p+2 = P_2$ и $\theta = 1/1000$. Усложнявайки още повече теглото и използвайки Теоремата на Пан Ченг Донг, Ши Сан-Инг [58] подобрява последният резултат до $\theta = 1.5/100$.

Диофантови неравенства.

Всяко диофантово уравнение може да се обобщи с диофантово неравенство.

Например диофантовите уравнения

$$c_1x_1^k + \ldots + c_sx_s^k = 0$$

могат да се обобщят до диофантово неравенство по следния начин. Нека коефициентите $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ са числа с различни знаци и поне едно от отношенията $c_i/c_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. При тези предположения има смисъл да се зададе въпроса дали изразът $c_1x_1^k + \ldots + c_sx_s^k$ може да приема произволно малки стойности при $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, k$.

През 1946 година Давенпорт и Хейлброн [17] адаптират кръговия метод на Харди-Литълууд и дават отговор на горния въпрос. Те доказват, че за всяко $\varepsilon > 0$ диофантовото неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{s} c_j x_j^k \right| < \varepsilon$$

има безбройно много решения в естествени числа x_j при $s \geq 2^k + 1$. По-късно (1963 г.) Шварц [57] разглежда горното неравенство, но с променливи - прости числа. Той успява да докаже, че то има безбройно много решения в прости числа при $s \geq 2^k+1$ или $s \geq 2k^2(2\log k + \log\log k + 5/2) - 1$ и $k \geq 12$. През 1967 година А. Бейкър [2] доказва, че ако

$$\begin{aligned} &\lambda_i,\, \eta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3; \\ &\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \text{ са числа с различни знаци}; \\ &B > 0 \quad \text{произволно голямо фиксирано число}, \end{aligned} \tag{2}$$

то диофантовото неравенство

$$|\lambda_1p_1 + \lambda_2p_2 + \lambda_3p_3 + \eta| < (\log\max p_j)^{-B}$$

е разрешимо в прости числа p_1, p_2, p_3. През 1973 Вон [68] разглежда горното неравенство при същите условия (2) и успява да докаже неговата разрешимост с оценка, зависеща от степента на максималното просто число. По-точно той установява, че неравенството

$$|\lambda_1p_1 + \lambda_2p_2 + \lambda_3p_3 + \eta| < (\max p_j)^{-\xi+\epsilon}\,, \tag{3}$$

има безброй много решения в прости числа p_1, p_2, p_3 при $\xi = 1/10$ и ε - произволно малко положително число. По-нататък експонентата последователно е подобрявана от Бейкър и Харман [3] - $\xi = 1/6$ и от Харман [30] до $\xi = 1/5$. В своята работа [3] Бейкър и Харман доказват още, че ако е в сила Обобщената хипотеза на Риман, то горното неравенство е разрешмо при $\xi = 1/4$. През 2008 година К. Матомаки

[50] доказва разрешимостта на неравенството (3) с $\xi = 2/9$ и това е най-добрият резултат до момента по този проблем.

Също така Харман [31] доказва, че ако $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1/\lambda_2$ е отрицателно ирационално число, то за всяко реално число α неравенството

$$|\lambda_1 p + \lambda_2 P_3 - \alpha| < p^{-1/300}$$

има безбройно много решения в прости числа p и P_3 почти просто. Този резултат е подобрение на предишен такъв на Вон, но с P_4 почти просто число.

Нашият следващ резултат е хибрид между проблема на Бейкър и хипотезата за простите числа близнаци. Ние доказваме следната

Теорема: *Нека са изпълнени условията (2). Тогава съществуват безбройно много наредени тройки прости числа $p_1,\ p_2,\ p_3$, такива че*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta| < [\log(\max p_j)]^{-B},$$

където

$$p_1 + 2 = P_8',\ p_2 + 2 = P_8''\ , p_3 + 2 = P_8'''.$$

Тази теорема е доказана в глава 4 дисертацията.

При доказателството ѝ използваме два метода - метода на Девънпорт-Хейлброн и метода на векторното решето.

Методът на Девънпорт-Хейлброн е в някакъв смисъл опростен вариант на кръговия метод на Харди-Литълууд. При кръговия метод ни е нужна оценка върху относително голям брой големи и малки дъги. Докато при метода на Девънпорт-Хейлброн имаме само една голяма, две малки дъги и два безкрайни интеграла, т.е. нужна ни е оценката само на пет интеграла. Тъй като подинтегралната функция има само един голям пик около нулата, то пресмятането на интеграла върху голямата дъга и отделянето на главната част е относително лесно. Оценката върху безкрайните интервали също се намира леко. Най-трудната част от метода на Девънпорт-Хейлброн е оценката върху двете малки дъги. Там трябва да се възползваме от факта, че поне едно от отношенията на параметрите $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ е ирационално. Като използваме ирационалността на отношението λ_1/λ_2 получаваме, че съществува безкрайно растяща редица от стойности на променливата, от която зависят границите на интервала на интегриране, за които модулът на една от участващите подинтегрални експоненциални суми е относително малък. Използвайки оценката на този модул оценяваме интеграла върху малките дъги.

Освен методът на Девънпорт-Хейлброн, при доказателството използваме и метода на векторното решето. Векторното решето е способ за отсяване на редица от вектори всичките компоненти на които са почти прости числа. Методът на векторното решето е развит през 1977 година от Иваниец [43]. Този метод се прилага в работите на редица автори - например в [8] и [9] на Брюдерн и Фаври и в [63] на Д.

Толев. При доказателството на нашата задача, ние го използваме по начин подобен на този от работата на Толев.

Теорема на Лагранж.

Третият проблем, който е разгледан в дисертацията е свързан с Теоремата на Лагранж за четирите квадрата. Тя гласи, че всяко естествено число може да се представи като сума от квадратите на четири цели числа. Първата формулировка на тази теорема е дадена през 1621 г. от Клод Бачет, който отбелязва, че тя е била известна на Диофант. През 1636 г. в едно свое писмо до Мертенс Ферма, твърди че има доказателство на тази теорема. Но Ферма никога не публикува това доказателство. Неговите бележки обаче вдъхновяват Ойлер, който работи върху този проблем четиридесет години.

Лагранж води усилена кореспонденция с Ойлер и през 1770 г. опирайки се на резултатите на Ойлер и на резултати за бинарните форми, успява да докаже теоремата за четирите квадрата. Две години по-късно Ойлер успява да направи финалната стъпка и също доказва теоремата.

През 1834 г., К. Г. Якоби ([27], гл. 20), намира точната формула за броя на представянията на дадено естествено число N като сума от квадратите на четири цели числа. По-точно, той доказва че този брой е равен на

$$8 \sum_{\substack{d|N \\ d\not\equiv 0\,(4)}} d \,. \tag{4}$$

При доказателствата на Лагранж и Якоби важна роля играе фактът, че коефициентите пред неизвестните в уравнението

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \,, \tag{5}$$

са единици. От тук възниква въпросът за разрешимостта на уравнението

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = N \,, \tag{6}$$

където a_1, a_2, a_3, a_4 са фиксирани естествени числа.

През 1926 г. Клостерман [45] прилага вариант на кръговия метод (сега известен като метод на Клостерман) и намира асимптотична формула за броя на решенията x_1, x_2, x_3, x_4 в цели числа на горното уравнение. Той доказва, че ако N удовлетворява някои естествени аритметични условия, то този брой е

$$R_{a_1,\dots,a_4}(N) = \frac{\pi^2}{\sqrt{a_1 \dots a_4}}\sigma^*(N)N + \mathcal{O}(N^{1-\delta}), \quad 0 < \delta < \frac{1}{18}$$

къдто $\sigma^*(N) \asymp 1$. В случая $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ за да е в сила горната формула трябва N да има голям нечетен делител. В противен случай съгласно формулата на Якоби (4) горната асимптотична формула няма да е изпълнена.

Класическия кръгов метод на Харди, Литълууд и Рамануджан е неприложим към уравнението (6). Той дава асимптотична формула за квадратични форми с пет и повече от пет променливи, но при по-малко от пет той не дава резултат.

Съществува недоказана хипотеза, че всяко естествено число N, $N \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 24)$, може да се представи като сума от квадратите на четири прости числа. Във връзка с тази хипотеза, много автори разглеждат различни вариации на задачата на Лагранж.

Например Грийвс [23] (1976 г.), Шийлдс [72] (1979 г.), Плаксин [82] (1982 г.) и Ковалчик [79] доказват разрешимостта на уравнението (5) за x_1, x_2 - прости числа и x_3, x_4 - естествени числа, при условие, че N е достатъчно голямо и $N \not\equiv 0, 1, 5\,($ mod 8). Освен това в работите [82] и [72] е изведена асимптотична формула за броя на решенията на уравнението (5) в две прости и две естествени числа.

През 1994 г. Брюдерн и Фуври [9] разглеждат уравнението (5) за достатъчно големи N, $N \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 24)$ и намират долна граница за броя на решенията му в естествени числа $x_i \in \mathscr{P}_{34}$.

2003 г. Хийт-Браун и Толев [38] доказват, че уравнението (5), при разгледаното по-горе ограничение, има решение за което x_1 е просто, а $x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{101}$ или $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{25}$.

2003 г. Толев [65] доказва, че за всяко естествено число N, $N \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 24)$, уравнението (5) има решение, което x_1 е просто, а $x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{80}$ или $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{21}$.

2011 Цай [10] изучава уравнението (5) при различни мултипликативни ограничения на неизвестните x_1, x_2, x_3, x_4 и доказва неговата разрешимост за

- x_1 просто, $x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{42}$;
- x_1 просто и x_2, x_3, x_4 такива, че $x_2x_3x_4 \in \mathscr{P}_{121}$;
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{P}_{13}$;
- x_1, x_2, x_3, x_4 такива, че $x_1x_2x_3x_4 \in \mathscr{P}_{41}$.

Разрешимостта на уравнението (5) в три почти прости и едно цяло число следва от резултатите на Бломер и Брюдерн [6], които доказват че всяко естествено $N \equiv 3\,($ mod 24), $5 \nmid N$ може да се представи като сума от квадратите на три цели числа от вида P_{521}. По-късно Лю Гуангши [48] разглежда същия проблем, но с естествени числа такива, че $x_1x_2x_3 \in \mathscr{P}_{551}$. От тези резултати следва решението на уравнението (5) в три почти прости числа и едно естествено.

Комбинирайки разгледаните по-горе проблеми, може да разгледаме следната задача: За даден полином $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ да се изследва разрешимостта на уравнението (5) в естествени числа x_1, x_2, x_3, x_4, такива че $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ е почти просто от даден ред. В настоящата работа е разгледан полиномът $f = x_1x_2x_3x_4 + 1$ и е доказана следната

Теорема: *Нека N е достатъчно голямо нечетно естествено число. Тогава уравнението*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N\,,$$

има решение в естествени числа x_1, x_2, x_3, x_4, *такива че числото* $x_1x_2x_3x_4+1$ *има не повече от 48 прости делителя и броят на тези решения е по-голям от* $\dfrac{cN}{\log N}$ *за някоя положителна константа* c.

Тази теорема е доказана в глава 5 на дисертацията.

Подобен резултат е в сила и когато N е четно, но има голям нечетен делител. Както забелязахме преди, ако N е степен на 2, съгласно Теоремата на Якоби (виж (4)) уравнението (5) има точно 24 цели решения, т.е. в този случай нашият метод не работи.

Ще отбележим още, че случая $x_1x_2x_3x_4 \in \mathscr{P}_r$ за някое естествено число r е съществено различен. В това направление са работите [9] на Брюдерн и Фуври, [38] на Толев, Хийт-Браун и [10] на Цай.

При доказателството на теоремата сме използвали метода на Клостерман и метода на линейното решето. Приносът на Клоостерман в кръговия метод на Харди-Литълууд се изразява в това, че той разбива единичния интервал само на големи дъги. За целта се използват дробите на Фарей. Така нуждата от оценка върху малките дъги отпада, но при оценката на големите дъги се появяват така наречените суми на Клостерман:

$$K(q,m,n)=\sum_{x(q)^*} e_q(mx+n\overline{x})\,,$$

и съответно нуждата от тяхното оценяване. Ние сме използвали оценката на Вейл ([19]).

Също така при подхода и разсъжденията към задачата, сме използвали статията [47] и работата [81].

Структура на дисертацията

Дисертацията се съътои от 5 глави и съдържа 178 страници.

Глава 1. Тази глава е уводна и е посветена на историята и възникаването на разглежданите проблеми. В първия параграф се дефинират основни означения от Теорията на числата и от Аналитичната теория на числата. Във втори параграф е дадена кратка историческа справка и са формулирани задачите, предмет на настоящата дисертация.

Глава 2. В тази глава сме дали всички дефиниции, твърдения и теореми, които сме използвали при доказателствата на разгледаните проблеми. В първия параграф са формулирани някои елементарни леми, които се използват по-късно при доказателствата на поставените проблеми. Във втори параграф са дадени някои резултати от математическия анализ. Трети параграф е посветен на свойствата на сумите на Гаус, Клостерман и Рамануджан. В четвърти параграф са формулирани основни Леми от теорията на решетото. В пети параграф се намират лемите, използвани при оценката на тригонометрични суми по прости числа. В последния шести параграф формулираме основни резултати за разпределението на простите числа.

Глава 3. В Глава 3 доказваме следното твърдение:

Теорема. *Нека* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \ \theta \le \ 1/100$. *Тогава съществуват безбройно много прости числа* p, *такива че* $p + 2 = \mathrm{P}_4$ *и*

$$||\alpha p + \beta|| < p^{-\theta}.$$

В първия параграф са дадени използваните при доказателството означения.

Втори параграф е анализ на задачата, от който следва метода и пътя на доказателството - линейно решето с тегла. Тук установяваме, че от положителността на сумата

$$\Gamma(N) = \sum_{\substack{N/2<p\le N\\ (p+2,\, P(z))=1}} \chi(\alpha p+\beta)\left(1-\kappa\sum_{\substack{z<q\le y\\ q|p+2}}\left(1-\frac{\log q}{\log y}\right)\right)\log p\,.$$

следва твърдението в теоремата. Тук $\chi(t)$ е периодична функция, която приема стойности по-малки или равни на характеристичната функция на интервала $(-\Delta,\,\Delta)$, $\Delta = N^{-\theta}$, κ и $y = N^{\rho}$ са параметри, които ще изберем по-късно. Целта ни е да докажем, че съществуват подходящи константи δ, η, θ, ρ, κ, такива че

A. съществува редица $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$, такава че

$$\lim_{j\to\infty} N_j = \infty, \qquad \Gamma(N_j) \gg \frac{\Delta(N_j)\,N_j}{\log N_j}\,, \quad j = 1,\,2,\,3,\dots$$

B. изпълнено е неравенството

$$\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\rho} < 5\,.$$

В параграф 3 са доказани пет помощни Леми. Сред тях е и Основната Лема:

Лема. *Нека* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $D = N^{\delta}$, $H = N^{\theta}\log^2 N$, $\delta\,,\theta > 0$ *и*

$$\delta + \theta < \frac{1}{3}\,.$$

Нека още $\xi(d)$, $c(k)$ *са комплексни числа, дефинирани за* $d \le D$, $0 < |k| \le H$,

$$\xi(d) \ll 1, \qquad c(k) \ll 1.$$

Тогава съществува редица $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty} N_j = \infty$, *такава че ако*

$$S(N) = \sum_{d\le D}\xi(d)\sum_{1\le|k|\le H}c(k)\sum_{\substack{N/2<p\le N\\ p+2\equiv 0\ (d)}} e(\alpha p k)\log p$$

то

$$S(N_j) \ll \frac{N_j}{\log^2 N_j}\,, \quad j = 1,\,2,\,3,\dots\,.$$

При доказателството на това твърдение използваме тъждеството на Хийт-Браун. Оценката на тази сума се оказва ключова за оценката на броя на делителите на $p+2$. Ще отбележим, че колкото за по-голямо D можем да оценим нетривиално горната сума, толкова по-добра ще е оценката на броя на простите делители на числата $p+2$. От друга страна D не бива да бъде прекалено голямо, за да може оценката на остатъчния член да има малък порядък в сравнение с главния член. Ние успяваме да оценим нетривиално тази сума за $D < N^{1/3-\varepsilon}$, където $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

В параграф 4 е завършено доказателството на Теоремата, като различните етапи на доказателството са изложени в съответни подпараграфи. За $\Gamma(N)$ намираме

$$\Gamma(N) \geq \Delta\left(\Phi_2 - \kappa G_2\right) + \mathcal{O}\big(\Delta|\Phi_3 - \kappa G_3|\big) + \mathcal{O}\left(1\right) \,,$$

където

$$\begin{aligned}
&\Phi_2 - \kappa G_2 \geq e^{\gamma}\, N\, \Pi(z)\, \Sigma_0 + \mathcal{O}\left(\frac{N}{(\log N)^{4/3}}\right), \\
&\Phi_3 - \kappa G_3 = \sum_{d\leq D} \left(\lambda^*(d) - \kappa\gamma(d)\right) \sum_{0<|k|\leq H} c(k) \sum_{\substack{N/2<p\leq N \\ p+2\equiv 0\,(d)}} e(\alpha p k) \log p \,.
\end{aligned}$$

Последната сума оценяваме като използваме Основната Лема. Тук Σ_0 е число, което при подходящ избор на параметрите δ, η, θ, ρ, κ е положително.

Глава 4. В Глава 4 е разгледано диофантово неравенство с прости числа p_i, за които числата $p_i + 2$ са почти прости от някакъв ред. В тази глава е доказана следната

Теорема. *Нека са изпълнени условията*

$$\begin{aligned}
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, 3\,; \\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \quad \text{- \textit{числа с различни знаци;}} \\
&\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,; \\
&\eta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

и B е произволно голямо фиксирано число. Тогава съществуват безбройно много наредени тройки прости числа p_1, p_2, p_3, такива че

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta| < [\log(\max p_j)]^{-B},$$

и

$$p_1 + 2 = P_8',\ p_2 + 2 = P_8''\ , p_3 + 2 = P_8'''.$$

В първия параграф са дадени използваните означения.

Във втория параграф са изложени разсъжденията от които тръгваме при решаване на проблема, както и избора на прилаганите методи - метод на Девънпорт-Хейлброн и метода на векторното решето. Установяваме, че от положителността на сумата

$$\Gamma(X) = \sum_{\substack{\lambda_0 X < p_1, p_2, p_3 \le X \\ (p_i+2, P(z))=1, i=1,2,3}} \upsilon(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta) \log p_1 \log p_2 \log p_3$$

следва твърдението на Теоремата. Тук $\upsilon(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta)$ е достатъчно гладка функция, която приема стойности в интервала $[0,\,1]$ при $|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta| < \vartheta = (\log X)^{-B-1}$. Функцията $\upsilon(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta)$ се изразява чрез нейното обратно преобразование на Фурие и прилагайки тримерното векторно решето оценката отдолу на сумата $\Gamma(X)$ се свежда до оценката отдолу на интеграла

$$\begin{aligned}\Gamma_0(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(t) \sum_{\lambda_0 X < p_1, p_2, p_3 \le X} & e\big((\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \eta)t\big) \log p_1 \log p_2 \log p_3 \\ & \times (\Lambda_1^- \Lambda_2^+ \Lambda_3^+ + \Lambda_1^+ \Lambda_2^- \Lambda_3^+ + \Lambda_1^+ \Lambda_2^+ \Lambda_3^- - 2\Lambda_1^+ \Lambda_2^+ \Lambda_3^+)\, dt \\ = \Gamma_1(X) + \Gamma_2(X) + \Gamma_3(X) - 2\Gamma_4(X)\,. &\end{aligned}$$

Ние изучаваме само интеграла $\Gamma_1(X)$, тъй като разглежданията за останалите интеграли са напълно аналогични. Оценката на интеграла $\Gamma_1(X)$ се свежда до оценката му върху една голяма дъга - $|t| \le \Delta$, две малки дъги - $\Delta < |t| < H$ и два безкрайни интеграла - $|t| \ge H$

$$\Gamma_1^{(1)}(X) = \int\limits_{|t|\le\Delta} \Upsilon(t) e(\eta t) L^-(\lambda_1 t,\, X) L^+(\lambda_2 t,\, X) L^+(\lambda_3 t,\, X) dt,$$

$$\Gamma_1^{(2)}(X) = \int\limits_{\Delta<|t|<H} \Upsilon(t) e(\eta t) L^-(\lambda_1 t,\, X) L^+(\lambda_2 t,\, X) L^+(\lambda_3 t,\, X) dt,$$

$$\Gamma_1^{(3)}(X) = \int\limits_{|t|\ge H} \Upsilon(t) e(\eta t) L^-(\lambda_1 t,\, X) L^+(\lambda_2 t,\, X) L^+(\lambda_3 t,\, X) dt$$

В третия параграф оценяваме интеграла по двата безкрайни интервала:

$$\Gamma_1^{(3)}(X) \ll 1.$$

В четвъртия параграф отделяме главната част от интеграла $\Gamma_1^{(1)}(X)$ - това е интегралът по голямата дъга и получаваме, че ако $G^{\pm} = \sum\limits_{d|P(z)} \dfrac{\lambda^{\pm}(d)}{\varphi(d)}$, то:

$$\Gamma_1^{(1)}(X) = B(X) G^-(G^+)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{X^2}{(\log X)^{2A+B}}\right),$$

където $B(X)$ е интеграл за който доказваме, че при

$$\lambda_0 < \min\left(\frac{\lambda_1}{4|\lambda_3|}\,,\frac{\lambda_2}{4|\lambda_3|}\,,\frac{1}{16}\right),$$

е в сила неравенството

$$B(X) \gg \vartheta X^2\,.$$

Това е мястото, на което използваме, че реалните числа λ_1, λ_2, λ_3 не са с едни и същи знаци.

В петия параграф оценяваме интеграла $\Gamma_1^{(2)}(X)$ - това е интегралът по двете малки дъги. Тук използвайки тъждеството на Хийт-Браун доказваме следната

Лема. *Нека* $X \in (0,\,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *и* $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *са такива, че* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. *Нека още* $q < X$, $D = \frac{X^{1/3}}{(\log X)^A}$, $\xi(d)$ *са комплексни числа, дефинирани за* $d \le D$,

$$\xi(d) \ll 1\,. \tag{0.1}$$

Тогава ако

$$\mathcal{L}(X) = \sum_{d\le D}\xi(d)\sum_{\substack{X/2<p\le X\\ p+2\equiv 0\,(d)}} e(\alpha p)\log p \tag{0.2}$$

то

$$\mathcal{L}(X) \ll \big(\log X\big)^{37}\left(\frac{X}{q^{1/4}} + \frac{X}{(\log X)^{A/2}} + X^{3/4}q^{1/4}\right).$$

Използвайки тази оценка, доказваме следната

Лема. *Нека* $t,\,X,\,\lambda_1,\,\lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$|t| \in (\Delta,\,H)\,,$$

където $\Delta = \dfrac{(\log X)^{A+1}}{X}$, $H = \dfrac{1000\log X}{\vartheta}$, $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *и*

$$V(t,\,X) = \min\left\{|L^{\pm}(\lambda_1 t,\,X)|, |L^{\pm}(\lambda_2 t,\,X)|\right\}.$$

Тогава съществува редица от реални числа $X_1,\,X_2,\ldots \to \infty$, *такава че*

$$V(t\,,X_j) \ll \frac{X_j}{(\log X_j)^{A/4-37}}\,, \quad j = 1, 2, \ldots\,.$$

В последния параграф за сумата $\Gamma(X_j)$ получаваме оценката

$$\Gamma(X_j) \ge B(X_j)W(X_j) + \mathcal{O}\left(\frac{X_j^2}{(\log X_j)^{A/4-43}}\right)$$

където за сумата $W(X)$ е в сила неравенството

$$W(X_j) \geq 3\mathcal{F}^3(z)\left(f(s) - \frac{2}{3}F(s) + \mathcal{O}\big((\log X_j)^{-1/3}\big)\right). \tag{0.3}$$

Избираме $s = \dfrac{\log D}{\log z} = 2.994$ и $\dfrac{1}{\alpha} = 8.982$. Проверяваме, че

$$f(s) - \frac{2}{3}F(s) \geq 0,0000001$$

и завършваме на доказателството на теоремата.

Глава 5. В Глава 5 разглеждаме броя на представянията на всяко голямо нечетно N във вида $N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, където $x_1x_2x_3x_4 + 1$ е почти просто от някакъв ред. В тази глава доказваме следната

Теорема. *Нека N е достатъчно голямо нечетно естествено число. Тогава уравнението*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N\,,$$

има решение в естествени числа x_1, x_2, x_3, x_4, такива че числото $x_1x_2x_3x_4 + 1$ има не повече от 48 прости делителя и броят на тези решения е по-голям от $\dfrac{cN}{\log N}$ за някоя положителна константа c.

В първия параграф са дадени използваните означения.

Във втория параграф привеждаме разсъжденията, които обуславят подхода към решението на проблема. Тук установяваме, че ако $\omega(x)$ е безкрайо гладка функция, която е положителна и различна от нула в интервала $\Delta = \mathbb{N} \cap (P/4,\, 3P/4)$, то ако установим, че за сумата

$$\Gamma(N) = \sum_{\substack{x_1^2+\cdots+x_4^2=N \\ (x_1x_2x_3x_4+1,\, P(z))=1}} \omega(x_1)\ldots\omega(x_4)\,.$$

е в сила оценката

$$\Gamma(N) \geq \frac{cN}{\log N}\,,$$

то от тук следва твърдението на теоремата.

Тъй като при доказателството използваме методът на решетото, първо изучаваме сумите

$$\Gamma_d(N) = \sum_{\substack{1\leq a_1,\ldots,a_4\leq d, \\ a_1\ldots a_4\equiv -1(d) \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\equiv N (\mathrm{mod}\ d)}} F(N, d, \vec{a})\,,$$

където d е свободно от квадрати и

$$F(N, d, \vec{a}) = \sum_{\substack{x_1^2+\cdots+x_4^2=N \\ x_i\equiv a_i(d) \\ i=1\div 4}} \omega(x_1)\ldots\omega(x_4)\,.$$

В третия параграф доказваме, че ако

$$V_q(N,\, d, \nu,\, \vec{a}, \vec{n}) = \sum_{a\,(q)^*} e\left(\frac{\overline{a}\nu - a(N - a_1^2 - \ldots - a_4^2)}{q}\right) G(q, ad^2, \vec{n} + 2a\vec{a}d)\,,$$

$$G(q, ad^2, 2a\vec{a}d) = \prod_{i=1}^{4} G(q, ad^2, 2aa_i d)\,,$$

където $G(q, m, n) = \sum\limits_{x(q)} e_q(mx^2 + nx)$ е сумата на Гаус, то при $2 \nmid Nd$, $\mu^2(d) = 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $\vec{a}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^4$ имаме

$$|\, V_q(N,\, d, \nu,\, \vec{a}, \vec{n})| \leq 4\tau(q) q^{\frac{5}{2}} (q, N)^{1/2} (q, N - a_1^2 - \ldots - a_4^2)^{1/2} (q, d^2)^2\,.$$

При това, ако някое от условията

$$(q,\, d)|\, n_i, \quad i = 1, \ldots, 4$$

не е изпълнено, то $V_q(N,\, d, \nu,\, \vec{a}, \vec{n}) = 0$.

Тази оценка използваме в следващите параграфи при изучаване на особения ред

$$\sigma(N,\, d,\, \vec{a}) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{a\,(q)^*} e\left(-\frac{a(N - a_1^2 - \ldots - a_4^2)}{q}\right) G(q, ad^2, 2a\vec{a}d)\,.$$

В четвъртия параграф доказваме следната

Лема. *Нека $a,\, q \in \mathbb{N}$ удовлетворяват условията*

$$(a,\, q) = 1\,, \quad 1 \leq q \leq P\,, \quad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{qP}\,,$$

$\beta \in \mathbb{R}$ *и* $|\beta| < \dfrac{1}{qP}$, $S_i(\alpha) = \sum\limits_{x \equiv a_i (d)} \omega(x) e(\alpha x^2)$ *и за произволно малко* $\varepsilon > 0$

$$M = dP^{\varepsilon}\,.$$

Тогава за всяко $B > 0$ е в сила равенството

$$S_i\left(\frac{a}{q} + \beta\right) = \frac{P}{dq}\, e\left(\frac{aa_i^2}{q}\right)$$
$$\times \sum_{|n| \leq M} e\left(\frac{na_i}{dq}\right) G(q, ad^2, 2aa_i d + n) J\left(\beta N, -\frac{nP}{dq}\right) + \mathcal{O}(P^{-B}),$$

където константата в знака $\mathcal{O}$ зависи само от B и ε.

В петия параграф започваме да прилагаме метода на Клостерман. Използвайки сумите на Клостерман в подпараграф 5.1 доказваме следната

Лема. *За сумата*

$$F(N,d,\vec{a}) = \sum_{\substack{x_1^2+\cdots+x_4^2=N\\ x_i\equiv a_i(d)\\ i=1\div 4}} \omega(x_1)\dots\omega(x_4)\,.$$

е в сила равенството

$$F(N,d,\vec{a}) = \frac{\varkappa N}{d^4}\,\sigma(N,\,d,\,\vec{a}) + O\big(P^{3/2+\varepsilon}\big),$$

където $\varepsilon > 0$ *е произволно малко.*

В параграф 6 са изложени резултати, свързани с особения интеграл $\varkappa$ и особения ред $\sigma(N,\,d,\,\vec{a})$.

В подпараграф 6.1 сме доказали, че интегралът

$$\varkappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\,(-\gamma)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_0\left(x-\frac{1}{2}\right)e(\gamma x^2)\mathrm{d}x\right)^4 d\gamma\ .$$

е абсолютно сходящ и $\varkappa$ е положително реално число.

В подпараграф 6.2 доказваме, че редът $\sigma(N,d,\vec{a})$ е абсолютно сходящ и за него е в сила равенството

$$\sigma(N,d,\vec{a}) = da(N)\alpha(N,\,d)\,,$$

където

$$a(N) = \prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+\xi_p(N)}}\right)\,,$$

$$\alpha(N,\,d) = \begin{cases} \prod\limits_{p\mid d}\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{1}{p^{1+\xi_p(N)}}\right)^{-1}, & \text{ако}\quad d\geq 3\,;\\ 1, & \text{ако}\quad d=1\,;\end{cases}\,.$$

В седми параграф установяваме равенството

$$\Gamma_d(N) = \varkappa a(N)N\Psi(N,\,d) + \mathcal{O}\left(N^{3/4+\varepsilon}\mathcal{L}(N,\,d)\right)\,,$$

където

$$\mathcal{L}(N,d) = \sum_{\substack{1\leq b_1,b_2,b_3,b_4\leq d\\ b_1^2+\cdots+b_4^2\equiv N\pmod d\\ b_1b_2b_3b_4+1\equiv 0\pmod d}} 1\,,$$

$$\Psi(N,\,d) = \frac{\alpha(N,d)\,\mathcal{L}(N,d)}{d^3}\,.$$

В подпараграф 7.1 за функцията $\mathcal{L}(N,\, d)$ намираме оценките

$$\mathcal{L} \le 4(p-1)^2\,,$$
$$|\mathcal{L} - p^2| \le 16p^{\frac{3}{2}}\,.$$

Тук при тези пресмятания използваме съществено вида на полинома $x_1x_2x_3x_4 + 1$, за стойностите на който искаме да са числа с малък брой прости делители, при положение че $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4$ удовлетворяват равенството $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N$.

В подпараграф 7.2 изучаваме функцията $\Psi(N,\, d)$, което ще ни позволи накрая да приложим метода на линейното решето. По-точно тук доказваме следната

Лема. *Нека* $N \in \mathbb{N}$, $2 \nmid N$, p *е просто число,* $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$, $2 < z_1 \le z_2$. *Тогава*

(i) $0 \le \Psi(N,\, p) \le 0.9 \quad$ *за* $\quad p > 2\,;$

(ii) $0 < \Psi(N,\, p) \quad$ *за* $\quad p > 1000\,;$

(iii) $\displaystyle\prod_{z_1 \le p < z_2} \big(1 - \Psi(N,p)\big)^{-1} \le \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + \frac{K}{\log z_1}\right)$, *където* $K > 0$ *е константа*;

(iv) $\displaystyle\prod_{1000 \le p < z} \big(1 - \Psi(N,p)\big) \asymp \frac{1}{\log z}\,.$

В параграф 8 прилагаме композиция на две решета и за Γ получаваме израза:

$$\Gamma \ge \varkappa a(N)N \sum_{d|P(z)} \theta(d)\Psi(N,\, d) + \mathcal{O}\left(N^{3/4+\varepsilon} \sum_{d|P(z)} \theta(d)\mathcal{L}(N,\, d)\right)\,,$$

където $\theta(d)$ е дефинирана за безквадратни нечетни естествени числа $d \le C_0 D$ и $|\theta(d)| \le 1$. За грешката доказваме, че

$$N^{3/4+\varepsilon} \sum_{d|P(z)} \theta(d)\mathcal{L}(N,\, d) \ll \frac{N}{\log^2 N}.$$

За главния член получаваме следната оценка отдолу:

$$\sum_{d|P(z)} \theta(d)\Psi(N,\, d) \ge \prod_{2<p<1000} \left(1 - \Psi(N,p)\right) \Pi(z) \left(f(s_0) + O\left((\log D)^{-\frac{1}{3}} \right) \right),$$

където

$$\Pi(z) \asymp \frac{1}{\log z} \asymp \frac{1}{\log N}\,.$$

За $\eta = \frac{1}{24} - 10^{-4}$ и $\delta = \frac{1}{12} - 10^{-4}$ получаваме

$$\Gamma \gg \frac{a(N)N}{\log N}$$

и завършваме доказателството на Теоремата.

Публикации във връзка с дисертацията

1. Todorova T. L., Tolev D. I., On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form, Math. Slovaca 60 (2010), no. 6, 771 –786.

2.Todorova T. L., Tolev D. I., On the equation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N$ with variables such that $x_1x_2x_3x_4 + 1$ is an almost-prime, приета за публикация в Tatra Mountains Mathematical Publications, volume 59, (2014), 1-26.

3. Dimitrov S. I., Todorova T. L., Diophantine approximation by prime numbers of a special form, приета за печат в Annual of Sofia University.

Цитирания

Първата статия е цитирана в 4 публикации:

1. Shi San-Ying, On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form, Osaka J. Math. 49 (2012), no. 4, 993–1004.

2. Matomaki Kaisa, A Bombieri–Vinogradov type exponential sum result with applications, Journal of Number Theory, Vol. 129, no. 9, (2009), 2214–2225.

3. Shi Sanying , Wu Zhaoxia, On the Distribution of ap^2 Modulo One for Primes p of a special type, Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 34, No. 3, (2013), 267-274.

4. Yingchun Cai, On the distribution of $\sqrt{p}$ modulo one involving primes of special type, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Volume 50, No. 4, December 2013, 470-490.

Апробация на резулататите

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните научни форуми:

1. New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria, 6-8 July, 2007.

2. ICTAMI Internacional Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, Alba Iulia, Romania, 29 August -02 September 2007.

3. International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava on his 70th Birth Anniversary, Uludag University, Bursa, Turkey, 18-21 August, 2010.

4. Юбилейна конференция 125 години математика и природни науки в СУ ”Св. Климент Охридски” София, България, 5-7 декември 2014.

5. Пролетна научна сесия на ФМИ, 28 март 2015 г.

6. Семинар „Динамични системи и теория на числата”, 2007 г.

Благодарности

Преди всичко искам да изкажа дълбоката си признателност и благодарност към научния си консултант - професор дмн Дойчин Толев за многобройните напътсвия, съвети, всестранна помощ и безрезервна подкрепа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Искрено съм благодарна и на всички колеги от катедра „Алгебра“, ФМИ, СУ, за приятелското отношение, подкрепата и помощта, която винаги съм чувствала. Особено съм благодарна на по-възрастните колеги, от които съм се учила и от които имам още много да науча.

Изключително съм благодарна на проф. Чакърян за голямата подкрепа и доверието, което ми оказа.

Библиография

[1] Apostol M. T., *Introduction to Analytic Number Theory* , Springer-Verlag, (1976).

[2] Baker A., *On some Diophantine inequalities involving primes*, J. Reine Angew. Math. **228** (1967), 166–181.

[3] Baker R., Harman G., *Diophantine approximation by prime numbers*, J. London Math. Soc., **25**, (1982), 201–215.

[4] Berndt B. C., Evans R. J., Williams K. S., *Gauss and Jacobi Sums* , A Wiley-Interscience Publication , 1998.

[5] Binbin Zhou, *The Chen primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Acta Arithmetica ,**01**, (2009), 138(4):301-315.

[6] Blomer V., Brüdern J., *A three squares theorem with almost primes*, Bull. London Math. Soc. 37, (2005), 507–513.

[7] Brun V., *Le crible d'Eratostène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci., Paris, **168** (1919), 544–546.

[8] Brüdern J., Fouvry E., *Le crible à vecteurs*, Compos. Math., **102** (1996), 337–355.

[9] Brüdern J., Fouvry E., *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math., **454** (1994), 59-96

[10] Cai Yinhchun, *Lagrange's four squares theorem with variables of special type*, Intern. J. Number Theory, 6, 8, (2010), 1801–1817.

[11] Cai Yingchun, *On Chen's theorem (II)*, Journal of Number Theory, 05 (2008), 128(5):1336-1357.

[12] Cai Yingchun, Lu Minggao, *Additive problems involving primes of special type*, Acta Arith. 140 (2009), no. 2, 189–204.

[13] Chadrasekharan K., *Introduction to Analytic Number Theory*, Cambridge Univeristy Press, 2005.

[14] Chen J. R. , *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica, 16, (1973), 157-176.

[15] Cojocaru A., Murty M., *An introduction to Sieve Methods ant their applications*, J. Reine Angew. Math., **454** (1994), 59-96.

[16] Davenport H., *Multiplicative number theory* (revised by H. Montgomery), Third ed., Springer, 2000.

[17] Davenport H., Heilbronn H., *On indefinite quadratic forms in five variables* J. London Math. Soc., **21** (1946), 185-193.

[18] Estermann T., *On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes*, Proc. London Math. Soc **44**, (1938), 307–314.

[19] Estermann T., *On Kloosterman's sums*, Mathematika, **8** (1961), 83-86.

[20] Estermann T., *A new application of Hardy-Littlewood-Kloosterman method*, Proc. London Math. Soc., **12**(3) (1962), 425-444.

[21] Finch St. R., *Mathematical constants*, Cambridge University Press, 2003.

[22] Friedlander J., Iwaniec H., *Using a parity-sensitive sieve to count prime values of a polynomial*, PNAS 94 (4) (1997), 1054–1058.

[23] Greaves G., *On the representation of a number in the form* $x^2 + y^2 + p^2 + q^2$ *where* p *and* q *are odd primes*, Acta Arith., **29** (1976), 257-274.

[24] Green B., Tao T. *The Primes Contain Arbitrarily Long Arithmetic Progressions*, Annals of Mathematics 167 (2), (2008), 481–547.

[25] Green B., Tao T., *Restriction theory of the Selberg sieve, with applications*, J. Theor. Nombres Bordeaux, **18**, (2006), 147–182.

[26] Halberstam H., Richert H. E., *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974.

[27] Hardy G. H., Wright E. M., *An Introduction to the Theroy of Numbers*, Fifth ed., Oxford Univeristy Press, 1979

[28] Harman G., *On the distribution of* αp *modulo one*, J. London Math. Soc. (2), 27(1), (1983), 9–18.

[29] Harman G., *On the distribution of* αp *modulo one. II*, Proc. London Math. Soc. (3), 72(2), (1996), 241–260.

[30] Harman G., *Diophantine approximation by prime numbers*, J. Lond. Math. Soc. 44(2) (1991), 218–226.

[31] Harman G., *Diophantine approximation with a prime and an almost–prime*, J. London Math. Soc. 29 (2) (1984), 13–22.

[32] Harman, G., *Prime-detecting sieves*, London Math. Soc. Monographs 33, Princeton University Press, (2007).

[33] Heath-Brown D. R., *Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity*, Canad. J. Math. 34, (1982), 1365-1377.

[34] Heath-Brown D. R., *Primes represented by* $x^3 + 2y^3$, Acta Math., 186, (2001), 1-84.

[35] Heath-Brown D.R., *A New Form of the Circle Method and its Application to Quadratic Forms*, J. Reine Angew. Math., **481** (1996), 149-206

[36] D.R.Heath-Brown, *Cubic forms in ten variables*, Proc. London Math. Soc. 47 (1983), 225–257.

[37] Heath-Brown D. R., Jia C. *The distribution of* αp *modulo one*, Proc. London Math. Soc., 84, (2002), 396-414.

[38] Heath-Brown D.R., D.I. Tolev, *Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost-prime variables*, J. Reine Angew. Math., **558** (2003), 159-224

[39] Hua L. K., *Introduction to Number Theory*, Springer, 1982

[40] Hua L. K., *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math. Oxford, 9, (1938), 68-80.

[41] Iwaniec H., *Rosser's sieve*, Acta Arithmetica, **36**, (1980), 171–202.

[42] Iwaniec H., *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arithmetica, **37** (1980), 307–320.

[43] Iwaniec H., *On sums of two norms from cubic fields*, Journées de théorie additive des nombres, Université de Bordeaux I, 1977, 71–89.

[44] Iwaniec H., Kowalski E., *Analytic number theory*, Colloquium Publications, vol. 53, Amer. Math. Soc., 2004.

[45] Kloosterman H.D., *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Acta Math., **49** (1926), 407-464

[46] Kumchev A., Tolev D., *An invitation to additive prime number theory*, arXiv preprint math/0412220, http://arxiv.org/pdf/math/0412220v1.pdf.

[47] Lapkova K., Tolev D.,*Lagrange's equation with almost prime variables lying in a short interval*, C. R. Acad. Bulg. Sci. 60, No. 7, (2007), 715-718.

[48] Lü G. S., *Gauss's three squares theorem with almost prime variables.* Acta Arith. 128 (2007), 391–399.

[49] Matomäki K., *A Bombieri–Vinogradov type exponential sum result with applications*, Journal of Number Theory, Vol. 129, no. 9 (2009), 2214–2225.

[50] Matomäki K., *Diophantine approximation by primes,* Glasgow Math. J.**52** (2010) 87–106.

[51] Matomäki K., *The distribution of αp modulo one*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**147(2)** (2009) 267–283.

[52] Maynard J., *Small gaps between primes*, Ann. Math., Is. 1, Vol. 181, (2015), 383-413. Preprint available at http://arxiv.org/abs/1311.4600, 2013

[53] Murty R. M., *Problems in Analytic Number Theory*, Springer, (2000).

[54] Peneva T., *On the ternary Goldbach problem with primes p such that $p+2$ are almost-prime*, Acta Math. Hungar., 86, (2000), 305–318.

[55] Peneva T., Tolev D. I., *An additive problem with primes and almost-primes*, Acta Arithmetica, **83**, 2, (1998), 155–169.

[56] Polymath D. H. J., *New equidistribution estimates of Zhang type*, Algebra and Number Theory, **8**, (2014), 2067-2199, http://arxiv.org/pdf/1402.0811v3.pdf.

[57] Schwarz W., *Uber die Lösbarkeit gewisser Ungleichungen durch Primzalen*, ibid 212 (1963), 150-157.

[58] Shi San-Ying, *On the distribution of alphap modulo one for primes p of a special form*, Osaka J. Math. 49 (2012), no. 4, 993–1004.

[59] Shmidt W. M., *Diophantine Approximation*, Springer-Verlag (1980).

[60] Titchmarsh E. C., *The theory of functions*, Second ed., Oxford Univeristy Press, 1958.

[61] Todorova T.L., Tolev D.I., *On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form*, Math. Slovaca 60 (2010), 771–786.

[62] Tolev D., *Representations of large integers as sums of two primes of special type*, in “Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis”, Walter de Gruyter, 2000, 485–495.

[63] Tolev D., *Arithmetic progressions of prime-almost-prime twins*, Acta Arith., 88, (1999), 67-98.

[64] Tolev D., *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arith., 96, (2000), 53-88. Corrigendum: Acta Arith. 105, 2, (2002), 205.

[65] Tolev D. I., *Lagrange's four squares theorem with variables of special type*, Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, 17 pp. Bonner Math. Schriften, 360, Univ. Bonn, Bonn, 2003.

[66] Tsang K. M., Zhao L., *On Lagrange's four squares theorem with almost prime variables*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). $ISSN(Online)1435-5345, ISSN(Print)0075-4102,\ DOI: 10.1515/crelle-2014-0094$, November 2014.

[67] Van der Corput J. G., *Sur l'hypoth'ese de Goldbach*, Proc. Acad. Wet. Amsterdam **41** (1938), 76–80.

[68] Vaughan R. C., *Diophantine approximation by prime numbers I,* Proc. Lond. Math. Soc. **28**(3), (1974), 373–384.

[69] Vaughan R. C., *On the distribution of αp modulo 1,* Mathematika **24**(2), (1977), 135–141.

[70] Vaughan R. C., *The Hardy–Littlewood method*, Sec. ed., Cambridge Univ. Press, Second edition, 1997.

[71] Zhang Y., *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics, **179**, Issue 3, (2014), 1121-1174.

[72] Shields P., *Some applications of the sieve methods in number theory*, Thesis, University of Wales, 1979.

[73] Weil A., *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **34** (1948), 204-207

[74] Виноградов И.М., *Основы теории чисел*, „Наука”, Москва, 1981.

[75] Виноградов И. М., *О представлении нечётных чисел суммой трёх простых слагаемых*, ДАН СССР, 15, (1937), 291-294.

[76] Виноградов И. М., *Метод тригонометрических сум в теории чисел*, Труд. Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, 23, (1947), 1-109.

[77] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, I, II,“Мир“, Москва, 1965

[78] Карацуба А. А., *Основы аналитической теории чисел*, Наука, 1983.

[79] Ковальчик Ф. Б., *Аналоги уравнения Харди–Литтлвуда*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 116, (1982), 86–95.

[80] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И., *Сборник задач по математическому анализу*, Москва, Наука, 1984.

[81] Лапкова К., *Методът на Клостерман в една задача от адитивната теория на числата,* Дипломна работа за получаване на научната и образователна степен магистър, ФМИ, СУ "Св. Кл. Охридски (2007)

[82] Плаксин В. А., *Асимптотическая формула числа решений нелинейного уравнения с простыми числами.*, Изв. АН СССР, сер. матем., **45** (1981), 321–397.

[83] Сегал Б. И., *Об одной теореме аналогичной теореме Варинга*, Докл. Акад. Наук СССР, (Н. С.) 2 (1933), 47–49.

[84] Толев Д. И., *Аддитивные задачи в теории чисел*, Докторска дисертация, МГУ "М. Ломоносов Москва, 2001.

[85] Толев Д., *Увод в Аналитичната теория на числата II част*, Записки по едноименния изборен курс, четен във ФМИ през учебната 2011/2012 г., http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/

[86] Чудаков Н. Г., *О проблеме Гольдбаха*, Док. Акад. Наук СССР, **17** (1937), 331–334.